GEOMETRÍA ANALÍTICA-VECTORIAL

Conceptos Básicos
Teórico y Práctico

Escrito por **Prof. A. Rodrigo Farinha**

Publicado en [Octubre de 2010] en mi sitio
www.arfsoft.com.uy

Índice

VECTORES

<u>Definición:</u> Un vector es una *matriz línea*, es decir que es una matriz de tipo fila o columna.

Usualmente se tiene la noción de que un vector es una "flecha" debido a su frecuente uso gráfico en Física en el plano y en el espacio. Pero se debe tener en cuenta, analizando la definición dada, que el *vector* es un ente matemático más general que eso.
Aquí se trabajará con vectores reales, es decir con matrices de tipo línea cuyos elementos son números reales. Esto permitirá representarlos mediante coordenadas y dibujarlos como un segmento dirigido (flecha).

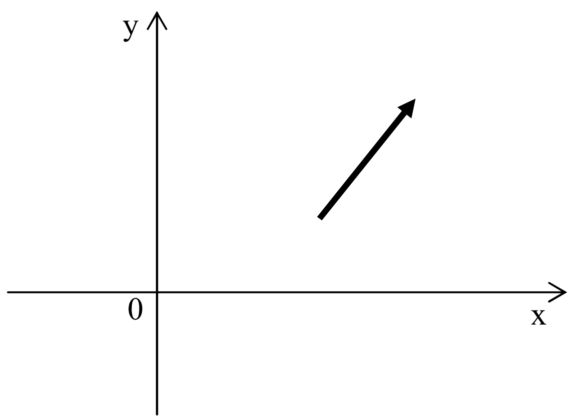
Características

Un vector posee 3 características:

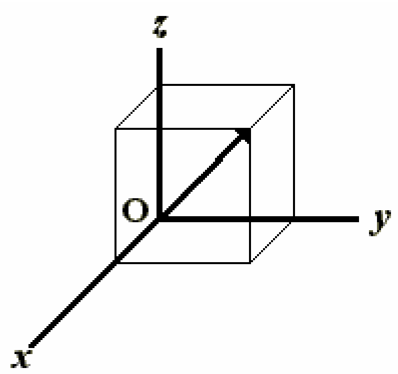
- **Módulo** o **Norma:** la longitud del vector
- **Dirección:** la recta a la que pertenece el vector
- **Sentido** (tener en cuenta que la recta posee dos sentidos)

Los vectores pueden situarse en el plano (2 dimensiones), en el espacio (3 dimensiones), hasta infinitas dimensiones.

En el plano:



En el espacio:

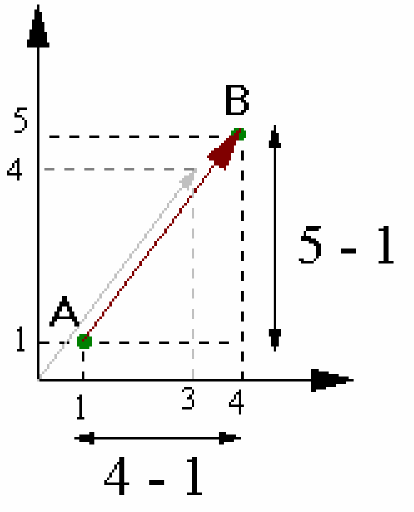


Notación

Una forma de nombrar un vector es escribiendo en forma ordenada las letras que representan a sus puntos extremos con una flecha encima: $\overrightarrow{AB}$ (vector que comienza en el punto A y termina en B).
Otra forma de nombrarlo es mediante una letra minúscula con una flecha encima: $\vec{v}$
También, cuando se sobreentiende que se trata de un vector, se puede escribir la letra sin la flecha: v

Cómo expresar un vector dados sus puntos extremos

Veamos los vectores en el plano (las mismas propiedades pueden ser aplicadas en más dimensiones). Es así que podemos escribir su *origen* y su *extremo* como puntos (x, y). La ubicación de estos puntos le dará el sentido al vector. Si el origen del vector es, por ejemplo, A = (1, 1) y el extremo B = (4, 5), el vector será AB (de A hasta B).



Es así que al hacer (4 – 1 , 5 - 1) = (3 , 4) vemos que la resta de las componentes horizontales y verticales nos determinan al vector:

vector = $\overrightarrow{AB}$ = B - A = (4 , 5) - (1 , 1) = (4 – 1 , 5 - 1) = (3 , 4)

3 y 4 son las *coordenadas del vector*

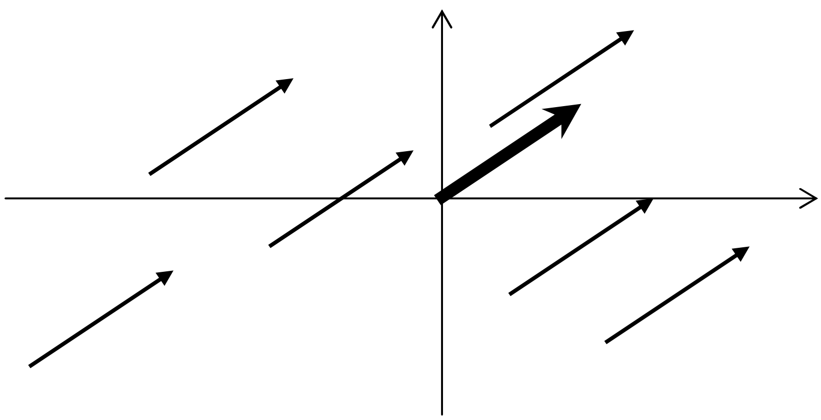
Generalizando:

Plano	*Espacio*
$A(x_A, y_A)$	$A(x_A, y_A, z_A)$
$B(x_B, y_B)$	$B(x_B, y_B, z_B)$
$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$	$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

Se trabajará con vectores libres**.** Un vector **libre** queda caracterizado por su módulo, dirección y sentido. El vector libre es independiente del lugar en el que se encuentra.

Igualdad de vectores

Dos vectores son iguales cuando tienen *el mismo módulo y la misma dirección*.
Por ejemplo, todos los vectores del dibujo son iguales (representan al mismo vector, simplemente están ubicados en lugares diferentes). De aquí en adelante se trabajará con el *representante canónico* de todos ellos: el que parte del origen (las coordenadas de su *punto extremo* serán las *coordenadas de ese vector*).



En términos algebraicos:

$$\text{Sean } u = (u_1, u_2) \; y \; v = (v_1, v_2)$$
$$u = v \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = v_1 \; y \; u_2 = v_2$$

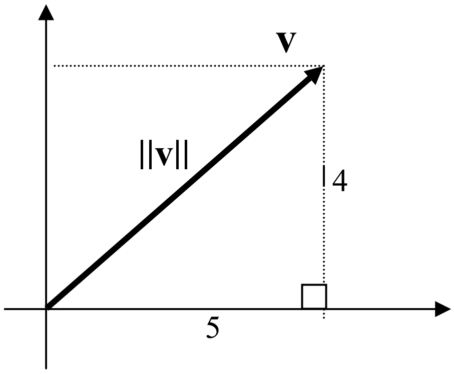
(la condición es similar en 3 y más dimensiones)

Vector nulo

Es el vector cuyo módulo es 0. No tiene dirección ni sentido. Se lo representa con el símbolo σ. Todas sus coordenadas son 0. Por ejemplo: en el plano es (0, 0); en el espacio es (0, 0, 0); etc.

Módulo de un vector

Veamos un ejemplo:



Sea el vector $v = (5, 4)$

Notación de módulo o norma de v: $\|v\|$ *o* $|v|$

(Aquí se utilizará la notación $\|v\|$)

Observando que el módulo es la longitud de la hipotenusa de triángulo rectángulo cuyos catetos son las coordenadas del vector, aplicamos el *teorema de Pitágoras*:

$$\|v\|^2 = 5^2 + 4^2$$

$$\|v\| = +\sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \cong 6.4$$

Ejercicio: Representar gráficamente el vector y comprobar este resultado midiendo.

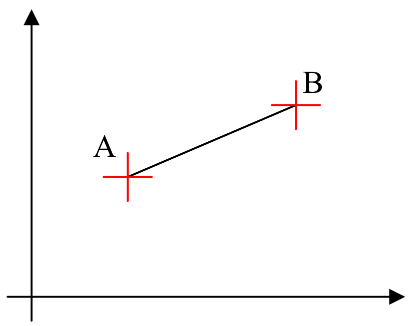
El módulo de ***v*** es la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de las coordenadas del vector.

En general:

En el plano:	$v = (x, y)$	$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
En el espacio:	$v = (x, y, z)$	$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos A y B, d(A,B), es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ (también puede tomarse el vector $\overrightarrow{BA}$, en lugar de $\overrightarrow{AB}$). Sabemos que, en el plano, $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,, y_B - y_A)$ así que, aplicando lo visto anteriormente en "Módulo de un vector"...



En el plano:

$$A(x_A, y_A)$$
$$B(x_B, y_B)$$
$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

En el espacio:

$$A(x_A, y_A, z_A)$$
$$B(x_B, y_B, z_B)$$
$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

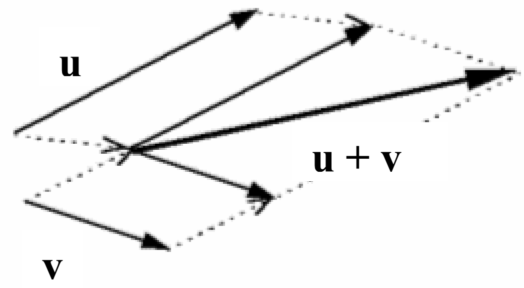
Ejemplo: La distancia entre los puntos del plano A(-2, 1) y B(3, 5) es:

$$d(A,B) = \sqrt{(3-(-2))^2 + (5-1)^2} = \sqrt{41} \cong 6.4$$

Suma de vectores

Método gráfico

Se aplica la *regla del paralelogramo*: se trasladan paralelamente los vectores hasta unirlos por el origen y luego se traza un paralelogramo, del que se obtiene el resultado de la suma como consecuencia de dibujar la diagonal del mismo, como se puede ver en el dibujo:



La suma de dos vectores libres es otro vector libre.

Ejemplo: Sumar u = (-1, 5) y v = (4, 2)

Método algebraico

En el plano:	$u=(u_1,u_2)$	$v=(v_1,v_2)$	$u+v=(u_1+v_1,u_2+v_2)$
En el espacio:	$u=(u_1,u_2,u_3)$	$v=(v_1,v_2,v_3)$	$u+v=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$

Ejemplo: u = (-1, 5) y v = (4, 2) u + v = (-1+4, 5+2) = (3, 7)

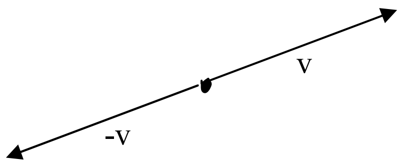
Propiedades de la Suma:
Conmutativa: $u+v=v+u$
Asociativa: $(u+v)+w=u+(v+w)$
Elemento neutro (vector nulo σ): $v+\sigma=\sigma+v=v$
Elemento simétrico (vector opuesto -v): $v+v'=v'+v=\sigma$ $v'=-v$

Observación: Es fácil ver en el dibujo que el módulo del vector suma no es igual a la suma de los módulos de los vectores involucrados: $\|u+v\|\neq\|u\|+\|v\|$
Lo que sí es cierto es que: $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$ (propiedad llamada *desigualdad triangular*)

Vector opuesto

-v: vector opuesto de v. Es el vector que tiene igual dirección y módulo que v, pero sentido opuesto.

Método gráfico



Ejemplo: Trazar el vector (2,5) y su opuesto
Trazar el vector (-3,4) y su opuesto

Método algebraico:

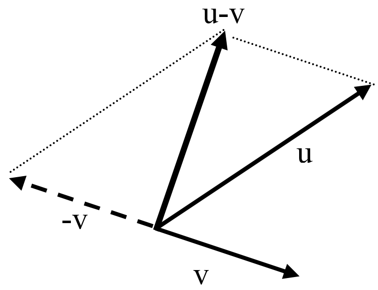
En el plano:	$v=(v_1,v_2)$	$-v=(-v_1,-v_2)$
En el espacio:	$v=(v_1,v_2,v_3)$	$-v=(-v_1,-v_2,-v_3)$

Ejemplo: opuesto de v = (2, 5): -v = (-2, -5)
opuesto de v = (-3, 0, 4): -v = (3, 0, -4)

Resta de vectores

Método gráfico

Se suma el primer vector con *el opuesto del segundo*:



Método algebraico $\boxed{u - v = u + (-v)}$

Ejemplo: Hallar u – v en forma gráfica y en forma algebraica:
u = (-2,6) v = (2,5): u – v = u + (-v) = (-2,6) + (-2,-5) = (-4,1)

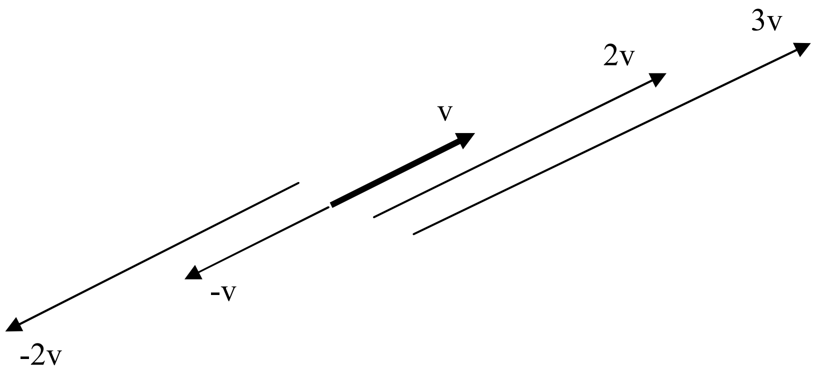
Para efectuar sumas o restas de tres o más vectores, el proceso es idéntico. Basta con aplicar la propiedad asociativa.

Producto de un vector por un número

El resultado de multiplicar un real **k** por un vector **v**, expresado analíticamente por **kv**, es otro **vector**, el cual presenta las siguientes características :

1.- Tiene la misma **dirección** que **v**.
2.- Su **sentido** coincide con el de **v**, si **k** es un número positivo, y es el opuesto, si **k** es un número negativo.
3.- El **módulo** es el producto del módulo de ***v*** por el valor absoluto de **k** (si **k** es 0, el resultado es el vector nulo σ).

La representación **gráfica** del producto de un vector por un número entero es igual a sumar el vector tantas veces como indica el número (y si este es negativo, se dibuja el opuesto).



Algebraicamente, tenemos que multiplicar el número por cada una de las coordenadas del vector:

En el plano:	$v = (v_1, v_2)$	$k.v = (k.v_1, k.v_2)$
En el espacio:	$v = (v_1, v_2, v_3)$	$k.v = (k.v_1, k.v_2, k.v_3)$

Ejercicio:

a) Representar gráficamente los vectores v = (4 , -2), 2v, 3v, -1v, -2v
b) Hallarlos algebraicamente.

Propiedades del Producto de un vector por un número
Conmutativa: $k.v = v.k$
Distributiva: $k.(u+v) = k.u + k.v$
Elemento Neutro (1): $1.v = v$
Elemento Simétrico (-1): $-1.v = -v$
Elemento Nulo (0): $0.v = \sigma$ (σ es el vector nulo)

Propiedad del módulo: $\| k.v \| = |k| . \| v \|$ ($|k|$ es el valor absoluto del número k)

Producto escalar de vectores

El producto escalar de dos vectores u y v, cuya notación es **u.v** o **<u,v>** (aquí se utilizará la primera), se obtiene sumando los productos formados por las coordenadas correspondientes de uno y otro vector.

Plano:	Espacio:
$u = (u_1, u_2)$	$u = (u_1, u_2, u_3)$
$v = (v_1, v_2)$	$v = (v_1, v_2, v_3)$
$u.v = u_1.v_1 + u_2.v_2$	$u.v = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$

Obsérvese que **el producto escalar es un número**, no un vector.

Ejemplos: u = (-2 , 6) v = (4 , 3) u.v = (-2)(4) + (6)(3) = 10
u = (1 , 0 , 3) v = (-5 , 4 , 2) u.v = (1)(-5) + (0)(4) + (3)(2) = 1

Propiedades del Producto escalar de vectores:
Conmutativa: u · v = v · u
Distributiva: r · (u + v) = r . u + r . v
Asociativa: (k · u) · v = k · (u · v) = u · (k · v) siendo k escalar (número real)

Observación:
Lo siguiente es válido para un vector de cualquier dimensión. Para ejemplificar, trabajaremos en 2 dimensiones: $v = (v_1, v_2)$

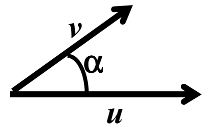
Recordando la fórmula de cálculo del módulo de un vector, tenemos: $\| v \|^2 = v_1^{\,2} + v_2^{\,2}$

Hallemos el producto escalar de un vector consigo mismo: $v.v = v_1.v_1 + v_2.v_2 = v_1^{\,2} + v_2^{\,2}$

Entonces: $\boxed{\| v \|^2 = v.v}$ *El cuadrado del módulo de un vector es igual al producto escalar de ese vector consigo mismo.*

Ángulo entre dos vectores

El producto escalar permite calcular el ángulo que hay entre dos vectores:



$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|}}$$

Aclaración:

$\left|\vec{u}.\vec{v}\right|$ es el *valor absoluto* del número $\vec{u}.\vec{v}$ (producto escalar de los vectores u y v)

Se toma el valor absoluto del producto escalar para obtener el menor de los dos ángulos formados por las direcciones de los vectores.

Ejemplo: u = (2 , 3) v = (-1 , 4) $\cos\alpha = \frac{|(2)(-1)+(3)(4)|}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{(-1)^2+4^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{13}\sqrt{17}} = 0.673 \Rightarrow \alpha = 47.7º$

Condición de paralelismo entre dos vectores

En términos geométricos, dos vectores son paralelos cuando tienen *igual dirección*.
En términos algebraicos, dos vectores son paralelos cuando son *proporcionales*.

$$\boxed{u \parallel v \Leftrightarrow \exists k \in R_0 \;/\; u = k.v}$$

Ejemplos:

u = (-5 , 4) y v = (10 , -8)

$u = -\frac{1}{2}v \Rightarrow$ u y v son paralelos

u = (2 , -3 , 0) y v = (-1 , 4 , 1)

Es imposible hallar un k que cumpla la condición $\Rightarrow$ u y v no son paralelos

Condición de perpendicularidad entre dos vectores

Utilizando la fórmula del ángulo entre dos vectores:

$$\alpha = 90º \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|} = 0 \Leftrightarrow \left|\vec{u}.\vec{v}\right| = 0 \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \qquad \boxed{u \perp v \Leftrightarrow u.v = 0}$$

Ejemplos:

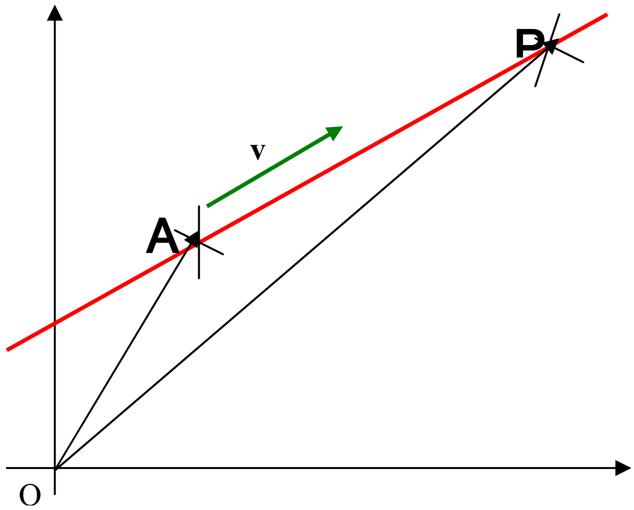
u = (5 , -4) v = (2 , 3) $u.v = (5)(2)+(-4)(3) = -2 \neq 0 \Rightarrow$ u y v no son perpendiculares

u = (-1 , 5, 3) v = (9 , 3, -2) $u.v = (-1)(9)+(5)(3)+(3)(-2) = 0 \Rightarrow$ u y v son perpendiculares

Observación: Aunque se cumple siempre que el producto escalar de un vector cualquiera por el vector nulo σ da 0, *no es cierto que el vector nulo es perpendicular a cualquier vector*, ya que no tiene dirección. <u>La condición de perpendicularidad planteada solo es válida para vectores **no nulos**</u>.

Ecuación vectorial de la recta

Una recta queda determinada cuando se conoce un **punto** y un **vector director** de la misma.
Vector director es aquel que tiene la misma dirección que la recta.
Sea el siguiente sistema de referencia, también llamado sistema de coordenadas cartesianas:



Conocemos el punto ***A*** y el vector director ***v***. El punto ***P*** es un punto cualquiera de la recta.

Utilizando los vectores de posición de los puntos dados, resulta:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

Además existe un número real λ tal que $\overrightarrow{AP} = \lambda.v$

Por tanto, $$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda.v}$$

La ecuación obtenida $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda.v$ recibe el nombre de **ecuación vectorial** de la recta dada.
Se llama vectorial porque la conocemos a través de los vectores de posición de cada uno de sus puntos.

Si las coordenadas de cada uno de los vectores son:
$\overrightarrow{OP} = (x, y)$; $\overrightarrow{OA} = (x_0, y_0)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$
se obtiene

$$\boxed{(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(v_1, v_2)}$$

que es la **ecuación vectorial de la recta expresada en coordenadas**.
Para cada valor que le demos a λ se obtiene un punto de la recta y si le damos todos los valores de los números reales, se obtienen todos los puntos de la recta.

Ecuación paramétrica de la recta

Se obtiene a partir de la ecuación vectorial expresando por separado cada variable:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda.v_1 \\ y &= y_0 + \lambda.v_2 \end{aligned}}$$

Ecuación continua de la recta

Se obtiene a partir de las ecuaciones paramétricas eliminando λ en el sistema:

$$x = x_0 + \lambda . v_1$$
$$y = y_0 + \lambda . v_2$$

Despejando λ en la primera ecuación: $\lambda = \dfrac{x - x_0}{v_1}$

Despejando λ en la segunda ecuación: $\lambda = \dfrac{y - y_0}{v_2}$

Igualando los valores de λ se obtiene la ecuación continua: $\boxed{\dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2}}$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto *A(2, - 1)* y tiene como vector director a *v =(1, -4)*

$x_0 = 2 \quad y_0 = -1 \qquad v_1 = 1 \quad v_2 = -4$

$(x, y) = (2,-1) + \lambda(1,-4)$ (ecuación vectorial)

$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 4\lambda \end{cases}$ (ecuación paramétrica)

$\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y + 1}{-4}$ (ecuación continua)

Ecuación cartesiana de la recta

Se obtiene a partir de la ecuación continua operando y simplificando hasta llegar a la forma

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Ecuación continua: $\dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2}$

Si pasamos los denominadores multiplicando: $v_2 (x - x_0) = v_1(y - y_0)$

Y eliminado paréntesis y ordenando en forma adecuada resulta: $v_2 x - v_1 y - v_2 x_0 + v_1 y_0 = 0$

v_1= - B ***v_2 = A***

El vector v = (- B, A) es un ***vector director*** *de la recta* $Ax + By + C = 0$

Ejemplo: Dada la recta de ecuación $\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{3}$, su ecuación cartesiana será:

$$3x+3=2y-10 \Rightarrow 3x-2y+13=0$$

Ejemplo: En el plano, cierta recta pasa por los puntos P(-3,1) y Q(1,1)

a) Escribir la ec. vectorial, paramétrica y cartesiana de la recta.
b) Determinar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta: (0,0) (0,1) (1,2) (-2,3)

a)
$v_1 = 1-(-3) = 4$
$v_1 = 1-1 = 0$

Vectorial: $(x,y)=(-3,1)+\lambda(4,0)$

Paramétrica: $x=-3+4\lambda$
$y=1$ *para todo* λ

Cartesiana: $y=1$

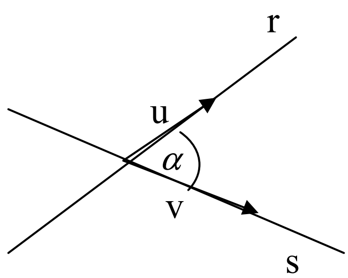
b) Solo (0,1)

Ángulo formado por dos rectas

En el caso de rectas dadas en su forma cartesiana,

$r: Ax+By+C=0$
$s: A'x+B'y+C'=0$

el ángulo formado por ellas es el de sus vectores directores.



Utilicemos la conclusión a la que se llegó en "Ecuación cartesiana de la recta":

$u=(-B,A)$ es un vector de director de la recta r

$v=(-B',A')$ es un vector director de la recta s

Entonces, aplicando la fórmula de cálculo del ángulo formado por dos vectores, tenemos:

$$\cos\alpha=\frac{|u.v|}{\|u\|.\|v\|}=\frac{|(-B)(-B')+AA'|}{\sqrt{(-B)^2+A^2}\sqrt{(-B')^2+A'^2}}=\frac{|BB'+AA'|}{\sqrt{B^2+A^2}\sqrt{B'^2+A'^2}}$$

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{|A.A'+B.B'|}{\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{A'^2+B'^2}}}$$

Ejemplo: Ángulo formado por las rectas *3x - y + 5 = 0* *- 2x - y + 1 = 0*

$$\cos\alpha=\frac{|(3)(-2)+(-1)(-1)|}{\sqrt{(3)^2+(-1)^2}.\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{10}.\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{10}.\sqrt{5}}=0.707\Rightarrow \alpha=45^{o}$$

Rectas Paralelas y Perpendiculares

Ya sea en el plano o en el espacio, *dos rectas son paralelas si tienen la misma dirección.* Y esto se cumple solo si sus vectores directores son proporcionales entre sí.

Veremos el caso en que las dos rectas son dadas en su forma cartesiana:

$$r: Ax + By + C = 0$$
$$s: A'x + B'y + C' = 0$$

Utilicemos la conclusión a la que se llegó en "Ecuación cartesiana de la recta":

$u = (-B, A)$ es un vector de director de la recta r

$v = (-B', A')$ es un vector director de la recta s

Son proporcionales si $u = k.v \quad \Leftrightarrow \quad (-B, A) = k(-B', A') = (-kB', kA') \quad \Leftrightarrow \quad B = k.B' \;\; y \;\; A = k.A' \quad \Leftrightarrow$

C

Condición de paralelismo de 2 rectas $\boxed{\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'}}$

Si los vectores directores *son perpendiculares entre sí*, las rectas también lo serán.
¿Cómo determinamos que dos vectores son perpendiculares entre sí?: El producto escalar de ambos debe dar cero (demostrado en "Condición de perpendicularidad entre 2 vectores").

$$u.v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-B, A).(-B', A') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-B)(-B') + AA' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad BB' + AA' = 0$$

$\boxed{A.A' + B.B' = 0}$ *Condición de perpendicularidad entre 2 rectas*

Posición relativa de dos rectas en el plano

Sean las rectas dadas en su forma cartesiana:

$$Ax + By + C = 0$$
$$A'x + B'y + C' = 0$$

Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}$ $\Rightarrow$ las rectas son *coincidentes*

Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'}$ $\Rightarrow$ las rectas son *paralelas disjuntas*

Si $\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$ $\Rightarrow$ las rectas son *secantes* (se cortan en un punto); si además $A.A' + B.B' = 0$, son *perpendiculares*

[Si A', B' o C' vale 0, comparar directamente los vectores directores de ambas rectas.]

Ejercicio: Comprueba que las rectas $r \equiv x + y - 2 = 0$ y $s \equiv x - 2y + 4 = 0$ son secantes y halla el punto de intersección de las mismas.

Ecuación canónica de la recta

Su forma es la siguiente:

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

($a \neq 0 \; y \; b \neq 0$)

Su ventaje es la facilidad para ser representada gráficamente (**a** determina el corte con el eje horizontal y **b** el corte con el eje vertical).
Para llegar a ella podemos partir de la ecuación cartesiana:

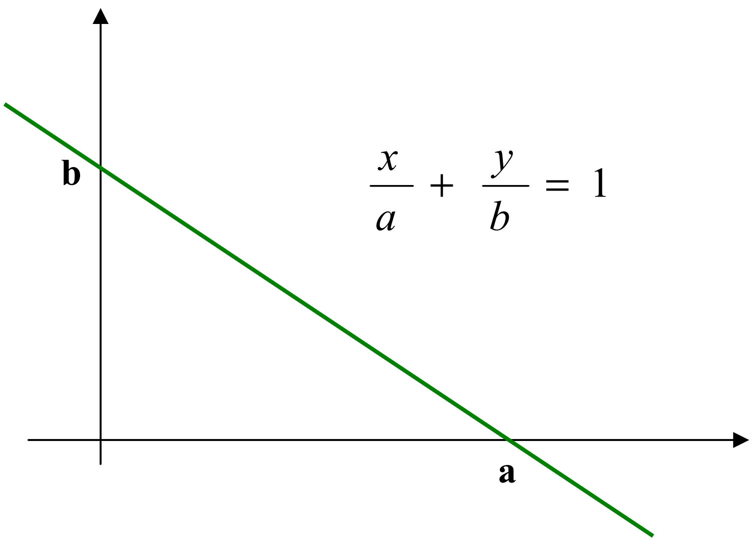
$$Ax+By+C=0$$

$$Ax+By=-C$$

Dividimos por – C: $\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=\frac{-C}{-C}$

Pasamos A y B al denominador:

$\frac{x}{-C/A}+\frac{y}{-C/B}=1$. Haciendo $-C/A=a$ y $-C/B=b$, se obtiene la ecuación canónica.

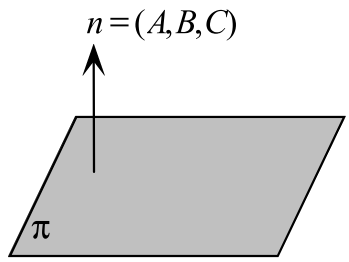


Ejemplo: La ecuación cartesiana de una recta es *2x +5y –4=0.* Expresarla en forma canónica.

$$2x+5y-4=0 \quad \Rightarrow \quad 2x+5y=4 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{4}+\frac{5y}{4}=\frac{4}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{4/2}+\frac{y}{4/5}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2}+\frac{y}{4/5}=1$$

Ecuación del plano

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$



Se demuestra que el vector cuyas coordenadas son los coeficientes de las variables de la ecuación del plano, es perpendicular al mismo.

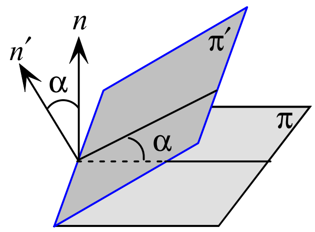
$$n = (A, B, C) \perp \pi$$

A n se lo llama *vector normal* al plano.

Ejemplo: Ecuación del plano que pasa por P(2, 1, 3) y es perpendicular al vector $v = (-1, 3, -2)$

El plano buscado será $-1x + 3y - 2z + D = 0$
Como pasa por el punto P(2, 1, 3): $-1(2) + 3(1) - 2(3) + D = 0 \Rightarrow -5 + D = 0 \Rightarrow D = 5$
Entonces, la ecuación del plano será : $-x + 3y - 2z + 5 = 0$

Ángulo formado por dos planos



Dos planos,

$\pi:\ Ax + By + Cz + D = 0$
$\pi':\ A'x + B'y + C'z + D' = 0$

determinan al cortarse cuatro ángulos diedros que son iguales dos a dos.
Se llama ángulo de los dos planos al más pequeño de los ángulos diedros.

El ángulo que forman los planos será el mismo que el que forman sus vectores normales (ver el dibujo).

Los vectores normales son:

$$n = (A, B, C)$$
$$n' = (A', B', C')$$

Aplicando la fórmula de cálculo del ángulo de dos vectores:

$$\cos\alpha = \frac{|n.n'|}{\|n\|.\|n'\|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos\alpha = \frac{|A.A' + B.B' + C.C'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}}$$

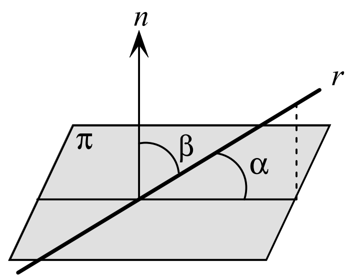
Ejemplo: Calcula el ángulo que forman los planos $\pi_1 : 2x - y - 3 = 0 ; \pi_2 : x + y - z = 0$

$$\cos\alpha = \frac{|2.1 - 1.1 + 0.(-1)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 75.04^o$$

Ángulo formado por una recta y un plano

Es el ángulo formado por la recta y la proyección de dicha recta sobre el plano.

$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$
$v = (v_1, v_2, v_3)$ vector director de la recta r



Teniendo en cuenta que α y β son *ángulos complementarios* $(\alpha + \beta = 90^o)$, se cumple que: $sen\,\alpha = \cos\beta$ (*)

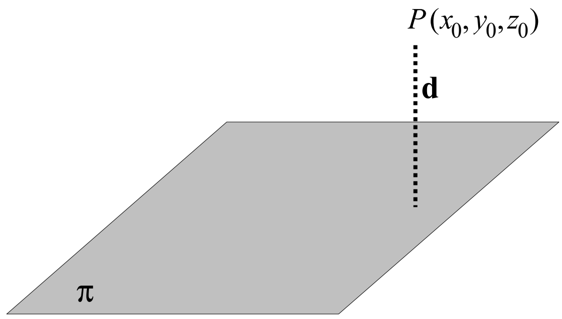
Además: $n = (A, B, C)$
Aplicando (*) y ángulo entre 2 vectores:

$$sen\,\alpha = \cos\beta = \frac{|n.v|}{\|n\|.\|v\|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{sen\,\alpha = \frac{|Av_1 + Bv_2 + Cv_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}}$$

Ejemplo: Calcula el ángulo que forma la recta de vector director v = (1, 2, -1) con el plano de ecuación $x + 3y + z - 5 = 0$
Vector perpendicular al plano: n = (1, 3, 1)
Vector director de la recta: v = (1, 2, -1)

$$sen\,\alpha = \frac{|1.1 + 3.2 + 1.(-1)|}{\sqrt{1+9+1}\sqrt{1+4+1}} = \frac{|1+6-1|}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{66}} \Rightarrow \alpha = 47.6^o$$

Distancia entre un punto y un plano



Punto P (x_0, y_0, z_0)
Plano $\pi\ Ax + By + Cz + D = 0$

$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

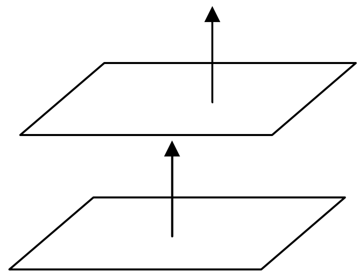
Ejemplo: Calcula la distancia entre el punto P(1, 2, −1) y el plano $2x - y + 2z + 3 = 0$

$$d = \frac{|2.1 - 1.2 + 2(-1) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3} \cong 0.33$$

Ejemplo: P(1, 2, 3) plano: x + y - 2z – 3 = 0

$$d = \frac{|1.1 + 1.2 - 2.3 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} \cong 2.45$$

Planos Paralelos y Perpendiculares



Dos planos son *paralelos* si sus vectores normales son *paralelos*.

Dos planos son *perpendiculares* si sus vectores normales son *perpendiculares*.

Posición relativa de dos planos en el espacio

Sean los planos

$$Ax + By + Cz + D = 0$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Así que, teniendo en cuenta que un vector normal a un plano es $n = (A, B, C)$ y lo visto acerca de las posiciones relativas de dos vectores, se puede concluir lo siguiente:

Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ $\Rightarrow$ los planos son *coincidentes*

Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ $\Rightarrow$ los planos son *paralelos disjuntos*

Si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ $\Rightarrow$ los planos son *secantes* (se cortan en una recta)

[Si A', B', C' o D' vale 0, comparar directamente los vectores normales de ambos planos.]

PRÁCTICO
GEOMETRÍA ANALÍTICA-VECTORIAL

1) Hallar las coordenadas del vector de origen en el punto *O(-2, -1)* y extremo en el punto *A(3, 3)*.

Sol: $\overrightarrow{OA} = (5, 4)$

2) Hallar el vector $\overrightarrow{PQ}$, calcular $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ y la distancia entre los puntos P y Q:

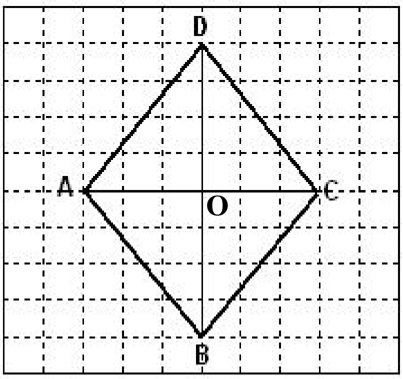
a) P(4 , -1) Q(2 , 5) *Sol:* $\overrightarrow{PQ} = (-2, 6)$ $\left|\overrightarrow{PQ}\right| \cong 6.32$

b) P(2 , 0 , -1) Q(-5 , 1 , 4) *Sol:* $\overrightarrow{PQ} = (-7, 1, 5)$ $\left|\overrightarrow{PQ}\right| \cong 8.66$

3) a) Hallar el módulo de u = (-1 , -1 , 1) y de v = (2 , 0 , -5) *Sol:* $|u| = 1.73$ $|v| = 5.39$

b) ¿$|u+v| = |u| + |v|$? Comprobar la respuesta en forma geométrica y analítica.

4) Observando el rombo de la figura y <u>sin utilizar las coordenadas de los vectores mencionados</u> , responder:



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$

5) Dados los vectores $\vec{a} = (5, -3)$ y $\vec{b} = (-2, 6)$

a) Sumarlos geométricamente.
b) Sumarlos analíticamente. *Sol: (3,3)*
c) Calcular analíticamente $4\vec{a}$ - $7\vec{b}$ *Sol: (34, - 54)*

6) Considerar los vectores **u =** (1, 0, 1) y **v** = (2, 1, 3). Calcular las siguientes **combinaciones** de vectores:

u + v , u – v , u + 2u , 2u + v , 2(u – 2v)

7) Siendo u = (3,-1,-4) v = (-2,4,-3) w = (1,2,-1)
Hallar:
a) $2u - v + 3w$ *Sol: (11,0,-8)*
b) $\left| u + v + w \right|$ *Sol: 9.64*

8) Si $u = (1,3,-2)$ y $v = (4,-2,4)$
Hallar:
a) $u.v$ *Sol: -10*
b) $\left| u \right|$ *Sol: 3.74*
c) $\left| v \right|$ *Sol: 6*

9) Dados los vectores: $u = (2,-3,4)$ $v = (-2,-3,5)$ $w = (1,-7,3)$
Calcular:
a) $2u + 5v - 7w$ *Sol: (-13,28,12)*
b) $|w|$ *Sol: 7.68*
c) El ángulo entre u y w *Sol: 32.2º*

10) Hallar el ángulo formado por los vectores:
a) u = $(3,2,-6)$ v = (4,-3,1) *Sol: 90º*
b) w =(4,-2,4) $a = (3,-6,-2)$ *Sol: 67.6º*

11) Hallar el ángulo formado por los vectores ***u** =(-5, 12)* y ***v** =(8, -6).* *Sol: 30.5º*

12) Determinar cuáles de las siguientes parejas de vectores son **paralelos** y cuáles son **perpendiculares**:

u = (2, -1, 3)	u = (-8, 1, 0)	u = (2, 0, 0)	u = (-9, -7, 2)
v = (1, 0, -3)	v = (1, 0, 3)	v = (0, 0, 0)	v = (27, 21, -6)

13) Hallar un vector **v** que sea perpendicular al vector **a** = (5, -3)
Dicho vector hallado v, ¿es el único vector del plano que es perpendicular al vector a?

14) a) Hallar el ángulo formado por las rectas -x + 3y + 1 = 0 2x – y - 4 = 0 *Sol: 45º*
b) Las rectas 4x + 2y - 2 = 0 -3x + 6y + 14 = 0 ¿son perpendiculares? (no hallar el ángulo)
c) Las rectas 6x - 3y + 6 = 0 -2x + y - 7 = 0 ¿son paralelas disjuntas?

15) Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto (4,-2,8) y cuyo vector normal es n = (3,-6,12)
Sol: 3x - 6y + 12z - 120 = 0

16) Calcular el ángulo que forman los planos $\pi_1 :\ x + 3y - z + 5 = 0\,;\pi_2 :\ 6x + y + 2z - 1 = 0$ *Sol: 70.8º*

17) Sean el plano $\pi : x - 2y + 4z = 12$ y el punto P(2 , -1 , 1). Calcular a qué distancia del plano π está el punto P. *Sol: 0.87*

18) Indicar cuál es la posición relativa de los siguientes planos:
a) 4x + 2y –6z + 4 = 0 2x + y – 3z – 1 = 0 *Sol: paralelos disjuntos*
b) x - 6y + 8z - 9 = 0 5x + y + z – 12 = 0 *Sol: secantes*